Вычисление базисных векторов касательной плоскости для произвольного меша

**Eric Lengyel • March 15, 2004**

Современное отображение неровностей [прим.: bump mapping] (также известное как отображение нормалей [прим.: normal mapping]) требует вычисления базисных векторов касательной плоскости для каждой вершины меша. В этой статье представлена теория, лежащая в основе вычисления касательных пространств для каждой вершины произвольной треугольной сетки, и приведен исходный код, реализующий соответствующую математику.

[Прим.: впервые это описание появилось в [*Mathematics for 3D Game Programming & Computer Graphics*](https://mathfor3dgameprogramming.com/), 1я ред., 2001., Обновлённое описание появилось в [*Foundations of Game Engine Development, Volume 2: Rendering*](https://foundationsofgameenginedev.com/#fged2), 2019.]

# Математическое описание

Мы хотим, чтобы наше касательная плоскость(пространство) располагалась так, чтобы ось соответствовала оси карты неровностей [прим.: bump map], а ось - оси . Т.е. если - точка внутри треугольника можно было бы записать:

,

где – позиция одной из вершин треугольника и – текстурные координаты этой вершины. Вектора и – касательный(tangent) и бикасательный(bitangent) векторы, направленные соответственно текстуре, они есть то, что нам требуется найти.

Пусть имеется треугольник с вершинами , и , которым соответствуют текстурные координаты , и . Наши вычисления будут проще, если будут произведены относительно точки , так что пусть:

,  
,

а также:

,

Для поиска и необходимо решить следующие уравнения:

,.

Это система линейных уравнений о 6ти неизвестных (по три для и ) и из шести уравнений (компоненты , и в каждом, из двух, векторных уравнений). Её можно записать в матричной форме:

Что даёт нам ненормированные вектора и для треугольника, заданного вершинами , и Что бы вычислить касательный(tangent) вектор для отдельной вершины нам необходимо усреднить касательные вектора для всех треугольников на эту вершину опирающихся, так же как это делается в случае усреднения вектора нормали. В случае если соседние треугольники имеют разрывы в текстурировании вершины на границе текстурирования уже продублированы поскольку, в любом случае, имеют другие текстурные координаты. Мы не усредняем касательные к таким треугольникам, потому что результат не будет точно отражать ориентацию карты неровностей для любого из треугольников.

Поскольку у нас есть вектор нормали и касательные вектора и к вершине, то мы можем перейти из касательного пространства в объектное используя матрицу:

Для совершения обратного преобразования (из объектного пространства в касательное – то, что нам необходимо для вычисления направления света), нам потребуется использовать матрицу обратную этой. Касательным векторам не всегда требуется быть перпендикулярными друг другу или вектору нормали, так что обратная матрица, в общем, не равна транспонированной. Однако можно полагать, что три вектора , и близки ко взаимной ортагональности, так что применение алгоритма Грамма-Шмидта для их ортагонализации не приведёт к неприемлемым искажениям. Используя этот процесс новые, всё ещё не нормализованные, вектора и выражаются так:

Нормализовав эти векторы и сохранив как касательный и бикасательный вектора для вершины будем использовать матрицу:

для преобразования направления света из объектного пространства в касательное. Взятие векторного произведения преобразованного вектора направления света со значением, взятым из карты нормалей (bump map), даёт корректное Ламбертово значение рассеянного света.